Паркевич Егор Вадимович
Студент 2-го курса магистратуры МФТИ, факультета ФПФЭ. Младший научный сотрудник в лаборатории ЛПНУ, отделения ОЯФА, ФИАН (РАН).

Использование коэффициента взаимной индукции при решении некоторых задач

В данной работе приведено качественное объяснение такому понятию, как взаимная индукция контуров. На примерах решения задач показано, как меняется результирующая индуктивность системы в зависимости от соединения её индуктивных составляющих. Показано, как можно определить коэффициент взаимной индукции двух катушек экспериментально.

Как правило, взаимная индукция, а также коэффициент взаимной индукции вводятся для описания замкнутых проводников или контуров, между которыми существует магнитная связь (магнитное поле одного влияет на процессы в другом и наоборот). В школьных и олимпиадных задачах такие понятия можно встретить, например, в случае различных соединений катушек индуктивности или в задачах про трансформаторы. Стоит отметить, что формальный расчёт, учитывающий влияние взаимной индукции на параметры электрической схемы, очень сложен и выходит за рамки школьной физики. В целом эту задачу по своей сложности можно отнести к расчёту индуктивности проводников различной геометрии. Но, несмотря на всё это, существуют достаточно простые качественные оценки, позволяющие учесть действие данного эффекта.

1. Взаимодействие двух магнитносвязанных контуров

Поясним это на следующем примере. Пусть у нас есть два контура 1 и 2 произвольных геометрических размеров, расположенные на расстоянии, не превосходящем заметно их собственные линейные масштабы.

Пусть по контурам протекают постоянные электрические токи I_1 и I_2, создаваемые источниками тока. Стоит отметить, что приведённые ниже рассуждения справедливы и для случая непостоянных токов в контурах. Будем также считать, что контуры образованы бесконечно тонкими проводниками. В реальности дело конечно же обстоит иначе. Наличие конечного сечения у проводника в случае непостоянных токов приводит к снижению как добротности контура, так и к сильному влиянию скин-эффекта из-за того, что суммарный ток протекает уже неравномерно по всему сечению проводника. Все эти эффекты крайне сложны с точки зрения описания, и поэтому мы их учитывать не будем.

1.1. Понятие коэффициента взаимной индукции

Рассмотрим теперь 1-й контур, вокруг которого ток I_1 создаёт постоянное магнитное поле. Примерная картина силовых линий магнитного поля с учётом указанных выше допущений изображена на рис. 1.

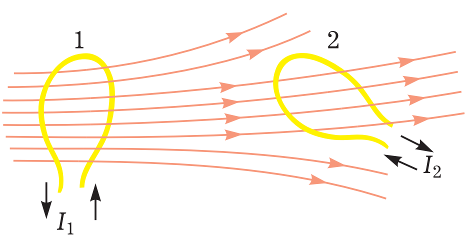

Рис. 1. Схематическое расположение контуров 1 и 2. Линиями указана примерная картина распределения силовых линий магнитного поля, созданного током I_1

Приведём также следующую трактовку связи магнитного потока, создаваемого протекающим током в контуре, с собственной индуктивностью контура, которая даётся в курсе общей физики и будет использоваться нами в дальнейшем:

Поскольку величина индукции магнитного поля в любой точке пространства пропорциональна величине тока, создающего это поле, то и магнитный поток Φ_1, создаваемый током I_1, который протекает в контуре 1, пропорционален току I_1, причём этот коэффициент пропорциональности представляет собой собственную индуктивность L_1 контура 1.

Часто ещё говорят, что магнитный поток, обусловленный током в контуре (его иногда ещё называют потоком самоиндукции контура), сцеплен с этим контуром, т.е. все линии магнитного поля, при условии своей замкнутости, как бы «опоясаны» этим контуром.

Однако такое определение сильно зависит ещё от одного условия, накладываемого на рассматриваемый нами случай на рис. 1. А именно, необходимо дополнительно предположить, что магнитная проницаемость среды, в которой замыкаются магнитные линии потока самоиндукции (то же будет относиться и к рассматриваемому ниже потоку взаимной индукции), не зависит от напряжённости магнитного поля. То есть рассматриваемый нами мысленный эксперимент на рис. 1 проводится не в магнитной среде.

Благодаря последнему допущению магнитный поток пропорционален обуславливающему его току, а индуктивность L рассматриваемого контура не зависит от тока и определяется лишь формой и геометрическими размерами самого контура.

В случае, как это обычно бывает, если электрические контуры выполнены из немагнитного материала и расположены в воздухе, магнитные проницаемости проводов и окружающей их среды могут быть приняты одинаковыми, а собственная индуктивность контура выражается в виде произведения магнитной проницаемости на величину, зависящую от формы, размеров и взаимного расположения контуров. Далее мы просто будем полагать, что магнитная проницаемость проводов и окружающей среды одинакова и равна магнитной постоянной. Последняя в системе СИ составляет $\mu_0 = 1{,}25 \cdot 10^{-6}$ Гн/м.

Рассмотрим теперь контур 2 с протекающим по нему током I_2. Поскольку контур находится на некотором расстоянии относительно 1-го, то, как это видно из рис. 1, лишь часть линий магнитного поля от 1-го контура пронизывает контур 2. Соответственно существует магнитный поток через второй контур (обозначим его через Φ_{12}), который отличен от нуля и, очевидно, меньше по абсолютному значению $\Phi_1 = L_1 I_1$. Часть данного магнитного потока Φ_{12}, пронизывающая контур 2, с учётом сказанного выше определения также будет пропорциональна току I_1. Поэтому введём соответствующий коэффициент M_{12}, устанавливающий данную связь, который мы назовём коэффициентом взаимной индукции контура 1 с контуром 2:

$$\Phi_{12} = M_{12} I_1. \qquad (1)$$

Стоит, однако, оговориться, что использование выше некоторого количественного сравнения линий магнитной индукции, пронизывающих контур 2, носит лишь наглядный характер для пояснения, почему же $\Phi_{12} < \Phi_1$. На самом деле при оперировании полными магнитными потоками важно:

- во-первых, знать, под какими углами в разных точках линии магнитной индукции от 1-го контура пересекают площадь, охватываемую контуром 2, при этом работать необходимо с интегральным выражением

$$\int_S (\vec{B} \cdot \overrightarrow{dS}) = \int_S B \cos\alpha \cdot dS,$$

где α – угол между вектором магнитной индукции $\vec{B}$ и вектором нормали $\vec{n}$ к поверхности контура, dS – малое приращение площади контура. Хотя интегральное определение наиболее оправдано, работать с ним всё же неудобно;

- во-вторых, необходимо знать, на каком расстоянии находятся два контура 1 и 2, поскольку величина магнитного поля, создаваемого, например, контуром 1, спадает с увеличением расстояния от контура;

- в-третьих, помнить, что при определении собственных и взаимных индуктивностей контуров за положительное направление обхода контуров всегда принимается направление протекающих по ним токов. Так как направление магнитных линий потока самоиндукции всегда образует правовинтовую систему с направлением обуславливающего его тока, то собственная индуктивность при указанном условии является величиной существенно положительной. Направление же линий потока взаимной индукции, напротив, зависит не только от направления тока, но также и от формы и взаимного расположения контуров. Поэтому взаимная индуктивность двух контуров может быть как положительной, так и отрицательной величиной и изменяет свой знак при изменении направления одного из токов. Последнее будет показано нами на примере ниже.

Вернёмся снова к рис. 1. Далее, поскольку через контур 2 проходит ток I_2, последний также создаёт магнитное поле вокруг себя. И в этом случае также только часть силовых линий магнитного поля, созданного током I_2, будет пронизывать контур 1. Рассуждая аналогичным образом, можно записать выражение для величины магнитного потока Φ_{21}, создаваемого током I_2 и пронизывающего контур 1, через коэффициент взаимной индукции M_{21} контура 2 с контуром 1:

$$\Phi_{21} = M_{21} I_2. \quad (2)$$

1.2. Работа по перемещению замкнутого проводника с током в магнитном поле

При дальнейшем анализе выражений (1) и (2) нам понадобится выражение для работы по перемещению замкнутого проводника с постоянным током в произвольном магнитном поле.

Часто в курсе общей физики приводится формула для выражения суммарной работы, совершаемой силой Ампера при перемещении проводника с током в магнитном поле, а именно:

Работа по перемещению замкнутого контура с постоянным током I в произвольном магнитном поле равна произведению силы тока в контуре, умноженной на изменение потока магнитной индукции через площадь, описанную этим контуром: $A = I\Delta\Phi$.

В нашем же случае применение данного выражения сразу абсолютно не очевидно! Например, не очевидно, что работа не будет зависеть как от «траектории», по которой будет перемещаться контур, так и от распределения магнитного поля вокруг рассматриваемого контура. Чтобы устранить все сомнения, проделаем ряд математических вычислений. Стоит отметить, что вывод формулы $A = I\Delta\Phi$ сохраняется и в общем случае, когда контур имеет сложную форму, а магнитное поле непостоянно в пространстве.

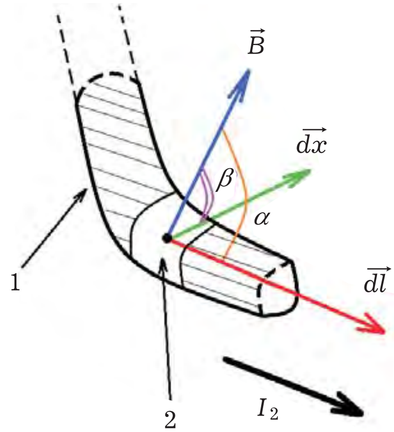

Рис. 2. Схематический чертёж для вычисления элементарной работы силы Ампера по перемещению бесконечно малого элемента dl проводника. Цифрами обозначены следующие объекты: 1 – небольшой участок контура 2; 2 – бесконечно малый элемент проводника dl

Рассмотрим, например, проводник, из которого сделан контур 2 на рис. 1. Допустим, что его отдельные элементарные части dl (слово «элементарные» в данном контексте означает «бесконечно малые по величине») ориентированы под различными углами α к направлению вектора индукции от контура 1. Для большей наглядности рассмотрим рис. 2.

Будем также считать, что для каждого малого элемента dl углы β между направлением элементарного перемещения dx и направлением силы Ампера $dF = BIdl\sin\alpha$ будут отличны от прямого. В этом случае работа, совершаемая при перемещении элементарной части проводника, будет равна:

$$dA = dF\,dx\,\cos\beta = BI\,dl\,\sin\alpha\,dx\cos\beta = \\ = IB\sin\alpha\,dS = Id\Phi, \qquad (3)$$

где $dS = dldx\,\cos\beta$ – площадь, описанная рассматриваемым элементом тока, а $d\Phi = BdS\sin\alpha$ – магнитный поток через эту площадь. Суммируя элементарные работы от всех бесконечно малых элементов контура, получим для всего проводника независимо от его формы и характера движения формулу:

$$A = I\Delta\Phi, \qquad (4)$$

где $\Delta\Phi$ для замкнутого контура означает изменение магнитного потока через площадь, охваченную этим контуром.

Приведём также некоторые полезные следствия из данной формулы, хотя далее они нами использоваться не будут. Во-первых, из (4) следует, что при повороте плоского контура в магнитном поле с индукцией $\vec{B}$ угол между направлением вектора $\vec{B}$ и нормалью к плоскости контура изменяется от α_1 до α_2. Выражение для работы, затрачиваемой на данное действие, имеет вид:

$$A = I\Delta\Phi = I\Phi_0(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1), \qquad (5)$$

где Φ_0 – наибольшее значение магнитного потока, когда плоскость контура перпендикулярна полю $\vec{B}$.

Также будет полезным выражение для перемещения в магнитном поле катушки с током и числом N одинаковых витков. В данном случае выражение для работы примет вид:

$$A = NI\Delta\Phi. \qquad (6)$$

Стоит также отметить, что работа совершается не магнитным полем, а электрическим током, проходящим через проводник, однако данное утверждение также требует доказательства, но этот момент мы опустим.

1.3. Тождественность коэффициентов взаимной индукции двух контуров

Теперь наша задача – доказать, что коэффициенты M_1 и M_2 в выражениях (1) и (2) равны друг другу, т.е. представляют собой одну и ту же взаимную индуктивность контуров:

$$M_{21} = M_{12}. \qquad (7)$$

Доказать это утверждение можно энергетическим путём. Для этого нам необходимо определить работу, которая может быть совершена силами магнитного поля при сближении контуров из бесконечности до рассматриваемого положения на рис. 1.

Если первый контур с током I_1 мы оставляем неподвижным и в магнитном поле, создаваемым током I_1, приближаем до заданного положения на рис. 1 второй контур с током I_2, то, учитывая, что магнитный поток, пронизывающий контур 2, увеличивается от нуля (на бесконечности) до Φ_{12}, для работы, совершаемой силами поля, получим следующее выражение:

$$W_{12} = I_2\Phi_{12} = I_2M_{12}I_1. \qquad (8)$$

Очевидно, что ту же работу мы получим, если неподвижным будет оставаться второй контур с током I_2, а приближать мы будем первый контур с током I_1. Поскольку магнитный поток, пронизывающий приближаемый первый контур и создаваемый током I_2, увеличивается от нуля до Φ_{21}, работа будет равна:

$$W_{12} = I_1\Phi_{21} = I_1 M_{21} I_2. \qquad (9)$$

Сопоставляя два полученных выражения для работы сближения контуров, обтекаемых токами I_1 и I_2, мы убеждаемся, что

$$M_{12} = M_{21} = M. \qquad (10)$$

Данный коэффициент носит название *коэффициента взаимной индукции* двух контуров 1 и 2.

2. Магнитная энергия двух взаимодействующих контуров

В ряде задач также полезным бывает знание ответа на вопрос о том, какая магнитная энергия запасена в рассматриваемой системе взаимодействующих контуров. Для ответа на этот вопрос поставим мысленный эксперимент дополнительно к рис. 1. Пусть ток I_1 в контуре 1 меняется со временем. Тогда во втором контуре согласно закону Фарадея индуцируется электродвижущая сила

$$\mathscr{E}_2 = -\frac{\triangle\Phi_{12}}{\triangle t} = -M\frac{\triangle I_1}{\triangle t}, \qquad (11)$$

где $\mathscr{E}_2$ [В], M [Гн], I_1 [А], а t [с]. Аналогично, когда изменяется ток I_2, в первом контуре индуцируется электродвижущая сила:

$$\mathscr{E}_1 = -\frac{\triangle\Phi_{21}}{\triangle t} = -M\frac{\triangle I_2}{\triangle t}. \qquad (12)$$

Из этих формул следует, что взаимная индуктивность двух проводников равна электродвижущей силе, которая индуцируется в одном из проводников, когда ток в другом проводнике изменяется на единицу величины в 1 секунду. Согласно сказанному выше, энергия взаимодействия токов I_1 и I_2, т.е. работа, которая может быть совершена силами магнитного поля токов при удалении проводников с токами I_1 и I_2, равными const, из рассматриваемого положения на бесконечность, будет

$$W_{12} = MI_1I_2, \qquad (13)$$

где W_{12} [Дж]. Очевидно, что полная энергия магнитного поля двух токов в контурах 1 и 2 равна:

$$W = \frac{L_1I_1^2}{2} + \frac{L_2I_2^2}{2} + MI_1I_2, \qquad (14)$$

где L_1 и L_2 – индуктивности контуров 1 и 2.

3. Магнитная связь двух катушек индуктивности

Как уже было отмечено выше, влияние взаимной индукции двух контуров заключено в их магнитном взаимодействии друг с другом (часто говорят, что имеет место магнитная связь). Это же явление оказывается существенным и при конструировании различных электрических аппаратов. Наглядно это можно показать на различных соединениях катушек индуктивности при сборке электрической цепи. Как правило, все соединения можно разделить на три основных случая – это последовательное и параллельное соединения, а также расположение вблизи друг друга (например, при сборке трансформаторов).

Однако прежде чем переходить к примерам, вспомним схему распределения линий магнитного поля вокруг катушки индуктивности с произвольным числом витков. Последнее нам понадобится для того, чтобы определить знак (+) или (–) в выражении ЭДС индукции.

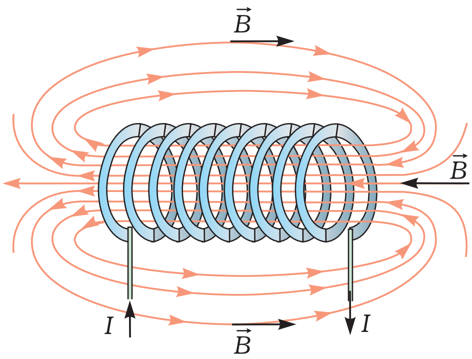

Рис. 3. Схема распределения линий магнитного поля вокруг катушки индуктивности

Для этого рассмотрим схематический чертёж на рис. 3. Направление протекания тока на рис. 3 соответствует движению слева направо. На рисунке видно, что если двигаться слева направо, то направление обмотки катушки будет идти против часовой стрелки. Далее, зная направление протекания тока, легко определить направление линий магнитного поля внутри катушки, рассмотрев, например, только первый виток на входе в катушку и применив правило «буравчика». Стоит при этом отметить, что если поменять направление протекания тока в системе, либо изменить направление обмотки витков катушки (заменив её, например, на другую), то направление линий магнитной индукции вокруг катушки изменится на противоположное.

Далее, при анализе магнитной связи катушек индуктивности знание направления витков обмотки катушек будет принципиально, поскольку в зависимости от этого вклад наведённой ЭДС индукции одной из катушек (в случае непостоянных токов невысокой частоты) может быть как положительным, так и отрицательным.

Рассмотрим теперь в качестве примеров следующие задачи.

Задача 1. Две катушки с токами могут взаимодействовать таким образом, что изменение тока в одной из них вызывает появление ЭДС в другой, и наоборот. Мерой этого взаимодействия является коэффициент взаимной индукции, абсолютное значение которого равно M. Дополнительная ЭДС, индуцированная в первой катушке, будет равна $\pm M\dfrac{dI_2(t)}{dt}$, а во второй $\pm M\dfrac{dI_1(t)}{dt}$, где $I_1(t)$ и $I_2(t)$ – силы токов в первой и во второй катушках соответственно. Знак индуцированной ЭДС определяется в зависимости от направления протекания тока и обмотки катушек. Пользуясь указанными данными, определить эквивалентную индуктивность L_{AB} схемы, представленной на рис. 4.

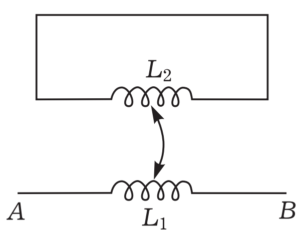

Рис. 4. Схема двух катушек индуктивности, расположенных вблизи друг друга

Какое наибольшее значение может иметь коэффициент взаимной индукции M? Считать, что направление намотки катушек неизвестно.

Решение. Рассмотрим решение данной задачи в общем виде, т.е. мы заранее не знаем направление намотки двух катушек и одинакова ли она у обеих. Для простоты будем ещё считать, что направление протекания тока соответствует движению слева направо в плоскости рисунка между точками A и B. Ясно, что при изменении тока I_1 в катушке с индуктивностью L_1 возникнет ЭДС самоиндукции, равная $L_1\frac{dI_1}{dt}$. При этом, в силу близости второй катушки относительно первой, во второй появится ЭДС, равная $\pm M\frac{dI_1}{dt}$, возникающая за счёт изменения пронизывающего её магнитного потока от первой катушки. Далее, при расчёте процессов в схеме на рис. 4 нам будет полезным использовать 2-е правило Кирхгофа, которое гласит, что:

Алгебраическая сумма ЭДС, действующих в замкнутом контуре, равна алгебраической сумме падений напряжения на всех резистивных и реактивных (индуктивности и ёмкости) элементах в этом контуре.

Формулировку 2-го закона Кирхгофа можно свести к следующему выражению:

$$\sum_{k=1}^{n}\mathcal{E}_k=\sum_{k=1}^{m}u_k=$$

$$=\sum_{k=1}^{m}R_k i_k+\sum_{k=1}^{m}u_{L\,k}+\sum_{k=1}^{m}u_{C\,k}. \qquad (15)$$

Если в контуре нет источников ЭДС (идеальных генераторов напряжения), то суммарное падение напряжений равно нулю. С учётом сказанного и 2-го правила Кирхгофа запишем для верхнего контура схемы, изображённой на рис. 4, следующее выражение:

$$L_2\frac{dI_2}{dt}\pm M\frac{dI_1}{dt}=0. \qquad (16)$$

Далее, поскольку во второй катушке возникнет ток I_2, который также будет меняться со временем, созданный им магнитный поток будет также пронизывать первую катушку и наведёт в ней дополнительную ЭДС $\pm M\frac{dI_2}{dt}$. Поэтому разность потенциалов U_{AB} между точками A и B окажется равной

$$U_{AB}=L_1\frac{dI_1}{dt}\pm M\frac{dI_2}{dt}. \qquad (17)$$

Из этих равенств получаем:

$$U_{AB}=L_1\frac{dI_1}{dt}\pm M(\mp M)\frac{1}{L_2}\frac{dI_1}{dt}=$$

$$=\left(L_1-\frac{M^2}{L_2}\right)\frac{dI_1}{dt}. \qquad (18)$$

Следовательно, независимо от направления намотки катушек эквивалентная индуктивность данной системы равна

$$L_{AB}=L_1-\frac{M^2}{L_2}. \qquad (19)$$

Индуктивность L – всегда положительная величина. В противном случае энергия катушки с током $LI^2/2$ должна была бы уменьшаться с увеличением тока I. Поэтому

$$L_1-\frac{M^2}{L_2}\geq 0, \qquad (20)$$

но тогда

$$M\leq\sqrt{L_1L_2}. \qquad (21)$$

Как видно, коэффициент взаимной индукции не может превышать среднего геометрического индуктивностей обеих катушек. Заметим, что приведённое вычисление L_{AB} не зависит от того, каким образом ток изменяется со временем, т.е. оно применимо как для синусоидальных токов, так и для несинусоидальных.

Ответ. $L_{AB} = L_1 - \dfrac{M^2}{L_2}$.

Рассмотренная нами задача 1 и полученный в ней результат для величины взаимной индукции крайне важен при расчёте параметров трансформаторов. Однако детали всех эффектов, имеющих место при работе трансформатора, тем более в случае переменных токов, слишком сложны для описания и носят узконаправленный характер. Тем не менее, в ряде задач школьной программы иногда попадаются задачи на данную тему. Рассмотрим в качестве примера несложную задачу 2.

Задача 2. На один сердечник намотаны две катушки с собственными индуктивностями, равными L_1 и L_2 (рис. 5). Найти коэффициент взаимной индукции M, если известно, что рассеяния магнитного поля внутри сердечника нет.

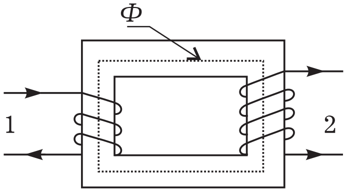

Рис. 5

Решение. Обозначим число витков в катушках N_1 и N_2. Далее, так как магнитный поток не рассеивается в сердечнике, он будет одинаковым для обеих катушек и равным Φ.

Соответственно, магнитный поток через первую катушку равен:

$$\Phi_1 = \Phi N_1,$$

а поток от первой катушки через вторую:

$$\Phi_{21} = \Phi N_2.$$

Аналогично поток через вторую катушку $\Phi_2 = \Phi N_2$, а поток от второй катушки через первую $\Phi_{12} = \Phi N_1$, откуда мы получаем следующее соотношение:

$$\Phi = \frac{\Phi_1}{N_1} = \frac{\Phi_{21}}{N_2}.$$

Положим, что ток через первую катушку равен I_1, тогда имеем: $\Phi_1 = I_1 L_1$ и $\Phi_{21} = I_1 M$. Отсюда, используя полученные ранее соотношения при сохранении потока, имеем:

$$\frac{L_1}{M} = \frac{N_1}{N_2}.$$

При токе I_2 только через вторую катушку получаем:

$$\Phi = \frac{\Phi_2}{N_2} = \frac{\Phi_{12}}{N_1}.$$

Полагая, что $\Phi_2 = L_2 I_2$ и $\Phi_{12} = M I_2$, находим:

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{M}{L_2}.$$

Из двух соотношений числа витков следует, что $M = \sqrt{L_1 L_2}$.

Ответ. $M = \sqrt{L_1 L_2}$.

Рассмотрим теперь случаи последовательного и параллельного соединений катушек индуктивности, обладающих при этом магнитной связью.

Задача 3. Пользуясь данными предыдущей задачи, определить индуктивность L_{AB} схемы, изображённой на рис. 6. Направление намотки у обеих катушек против часовой стрелки. Считать, что ток в схеме непостоянный $I = I(t)$. Изменится ли результат, если изменить направление намотки на противоположное?

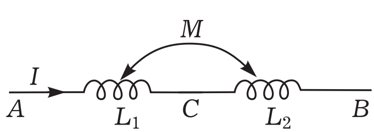

Рис. 6. Последовательное соединение катушек

Решение. Запишем разность потенциалов между точками A и B в виде:

$$U_{AB} = U_{AC} + U_{CB}. \qquad (22)$$

Поскольку ток, протекающий через катушки, одинаков, с учётом направления обмотки катушек разность потенциалов между точками A и C можно записать в виде:

$$U_{AC} = L_1 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt}, \qquad (23)$$

где $L_1 \frac{di}{dt}$ – ЭДС самоиндукции, возникающая в катушке с индуктивностью L_1, а $M\frac{di}{dt}$ – наводимая в ней ЭДС второй катушкой за счёт взаимной индукции. Аналогичным образом получим выражение для разности потенциалов между точками C и B:

$$U_{CB} = L_2 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt}. \qquad (24)$$

Следовательно,

$$U_{AB} = (L_1 + L_2 + 2M)\frac{di}{dt}. \qquad (25)$$

С другой стороны, согласно определению эквивалентной индуктивности L_{AB}, должно выполняться равенство:

$$U_{AB} = L_{AB}\frac{di}{dt}. \qquad (26)$$

Сравнивая два последних равенства, находим

$$L_{AB} = L_1 + L_2 + 2M. \qquad (27)$$

Если бы катушка индуктивностью L_1 была навита в противоположную сторону, то, согласно схеме распределения линий магнитного поля вокруг катушки (см. рис. 3), в выражениях для U_{AC} и U_{CB} перед M стоял бы знак минус, и тогда мы имели бы

$$L_{AB} = L_1 + L_2 - 2M. \qquad (28)$$

Ответ. $L_{AB} = L_1 + L_2 \pm 2M$.

Задача 4. Пользуясь данными предыдущей задачи, определить индуктивность L_{AB} схемы, изображённой на рис. 7. Направление намотки у обеих катушек против часовой стрелки. Изменится ли результат, если изменить направление намотки на противоположное?

Решение. Стоит отметить, что при одинаковом направлении намотки катушек и их расположении, как показано на рисунке, вклад наведённой ЭДС индукции будет со знаком (–). Последнее легко понять, если обратить внимание на расположение линий магнитной индукции вне катушки на рис. 3. С учётом параллельного соединения катушек и правил Кирхгофа можем записать для контура AB следующие равенства:

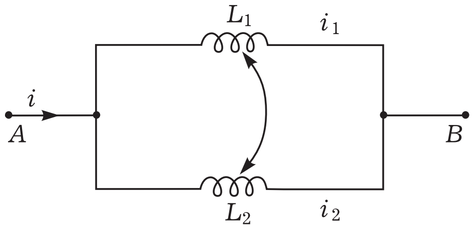

Рис. 7. Параллельное соединение катушек

$$i = i_1 + i_2 \qquad (29)$$

(1-й закон Кирхгофа),

$$U_{AB} = L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt} \qquad (30)$$

(верхняя часть контура),

$$U_{AB} = L_2\frac{di_2}{dt} - M\frac{di_1}{dt} \qquad (31)$$

(нижняя часть контура).

Используя равенство (29), уравнения (30) и (31) можно представить в виде:

$$U_{AB} = L_1\frac{di}{dt} - (L_1 + M)\frac{di_2}{dt}, \qquad (32)$$

$$U_{AB} = (L_2 + M)\frac{di_2}{dt} - M\frac{di}{dt}. \qquad (33)$$

Отсюда получим равенства

$$\frac{L_1}{L_1 + M}U_{AB} = \frac{L_1}{L_1 + M}\frac{di}{dt} - \frac{di_2}{dt}, \qquad (34)$$

$$\frac{1}{L_2+M}U_{AB}=\frac{di_2}{dt}-\frac{M}{L_2+M}\frac{di}{dt}. \quad (35)$$

Сложив эти уравнения и выделив коэффициенты при U_{AB}, находим:

$$U_{AB}=\frac{\dfrac{L_1}{L_1+M}-\dfrac{M}{L_2+M}}{\dfrac{L_1}{L_1+M}+\dfrac{1}{L_2+M}}\cdot\frac{di}{dt}=$$

$$=\frac{L_1L_2-M^2}{L_1+L_2+2M}\cdot\frac{di}{dt}. \quad (36)$$

Пользуясь определением индуктивности L_{AB}, получаем следующий конечный результат:

$$L_{AB}=\frac{L_1L_2-M^2}{L_1+L_2+2M}. \quad (37)$$

Изменению направления намотки катушки индуктивности L_1 соответствует, согласно схеме на рис. 3, изменение знака при M в уравнениях (30) и (31). В этом случае

$$L_{AB}=\frac{L_1L_2-M^2}{L_1+L_2-2M}. \quad (38)$$

Ответ. $L_{AB}=\dfrac{L_1L_2-M^2}{L_1+L_2\pm 2M}.$

Из полученных выражений для последовательного и параллельного соединений катушек легко видеть, что в случае, когда можно пренебречь взаимной индукцией катушек, последние совпадают с последовательным и параллельным соединениями резисторов по форме записи эквивалентной индуктивности участка схемы:

$$L_{AB}=L_1+L_2 - \quad (39)$$

последовательное соединение катушек,

$$L_{AB}=\frac{L_1L_2}{L_1+L_2} - \quad (40)$$

параллельное соединение.

Данный факт порой хорошо помогает в решении различных задач, в которых можно пренебречь магнитной связью индуктивных элементов.

Рассмотрим теперь на примере решения задачи 5, как можно опытным путём измерить коэффициент взаимной индукции двух катушек индуктивности, расположенных аналогично случаю на рис. 4, используя амперметр и вольтметр.

Задача 5. Рассмотрим схему, изображённую на рис. 8. Первую катушку подключили к источнику синусоидальной ЭДС $\mathcal{E}$ через амперметр, а к зажимам второй катушки присоединили вольтметр с большим внутренним сопротивлением. Вольтметр при этом показал 100 В, а амперметр 10 А; ω = 314 рад/с. Определите коэффициент взаимной индукции катушек M.

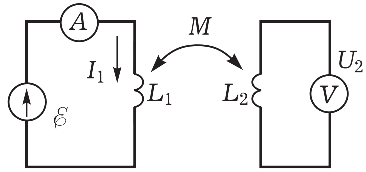

Рис. 8. Экспериментальная схема

Решение. Рассмотрим первый контур, содержащий источник синусоидальной ЭДС и катушку индуктивности L_1. Будем считать амперметр идеальным, тогда можно не учитывать его внутреннее сопротивление. Также будем полагать, что в цепь переменного тока включена идеальная катушка с электрическим сопротивлением провода, равным нулю. При изменениях напряжения по гармоническому закону

$$U(t)=U_m\sin\omega t \quad (41)$$

сила тока в контуре будет меняться по закону

$$I_1(t)=I_m\cos\omega t. \quad (42)$$

В соответствии с этим амперметр будет показывать действующее значение силы тока, т.е. $I_A=I_m/\sqrt{2}$. По условию эта величина равна 10 А. Далее, поскольку катушки магнитносвязаны, т.е. имеется взаимная индукция катушек, при изменении тока в первой во второй катушке будет наводиться дополнительная ЭДС за счёт изменения магнитного потока от первой катушки. Напряжение же на второй катушке будет равно:

$$U_2(t) = M\frac{dI_1}{dt}, \qquad (43)$$

поэтому на вольтметре мы увидим действующее значение напряжения, равное

$$U_m = \frac{\omega M I_m}{\sqrt{2}} = \omega M I_A. \qquad (44)$$

Подставляя полученные с амперметра и вольтметра данные, находим

$$M = \frac{U_m}{\omega I_A} = \frac{100}{314\cdot 10} = 0{,}0319 \text{ Гн}. \quad (45)$$

Ответ. $M = \frac{U_m}{\omega I_A} = \frac{100}{314\cdot 10} = 0{,}0319$ Гн.

4. Некоторые приложения

В заключение данной работы рассмотрим, каким образом можно изменять индуктивность схемы, используя явление взаимной индукции. Как мы уже показали ранее, в случае близкого расположения между катушками с индуктивностями L_1 и L_2 и взаимной индуктивностью M существует следующая зависимость:

$$M = k\sqrt{L_1 L_2}, \qquad (46)$$

где величина $k \le 1$ называется коэффициентом *связи катушек*. Ясно, что электромагнитная связь между двумя катушками может быть изменена, если сближать их или удалять относительно друг друга, а также если менять их взаимное расположение. В радиотехнике часто применяют приборы, работающие по принципу взаимной индукции и служащие для плавного изменения индуктивности цепи. Такие приборы называются

Рис. 9. Схема вариометра: одна катушка внутри другой

вариометрами. Они состоят из двух последовательно соединенных катушек, одна из которых может вращаться внутри другой (см. рис. 9).

Пусть эти катушки имеют следующие характеристики: r_1, r_2 – омические сопротивления, L_1, L_2 – индуктивности, i – ток, текущий в схеме. Пусть обе катушки расположены так, чтобы оси их вращения совпадали и магнитные поля катушек были направлены одинаково (согласованное включение). В этом случае будем иметь:

$$U = i(r_1 + r_2) + L_1\frac{di}{dt} + L_2\frac{di}{dt} + 2M\frac{di}{dt} =$$

$$= i(r_1 + r_2) + \frac{di}{dt}(L_1 + L_2 + 2M) =$$

$$= ir + L'\frac{di}{dt}, \qquad (47)$$

где индуктивность системы из двух индуктивно связанных катушек равна:

$$L' = L_1 + L_2 + 2M. \qquad (48)$$

Если повернуть внутреннюю катушку на 180°, то в этом случае магнитные потоки катушек будут направлены навстречу один другому (встречное включение). В этом случае получим:

$$U = i\left(r_1 + r_2\right) + L_1\frac{di}{dt} + L_2\frac{di}{dt} - 2M\frac{di}{dt} =$$

$$= ir + L''\frac{di}{dt}, \qquad (49)$$

где

$$L'' = L_1 + L_2 - 2M. \qquad (50)$$

Вращая катушку между первым и вторым положением, мы можем изменять индуктивность системы в пределах от L' до L''. Сам вариометр в радиотехнике в качестве катушки переменной индуктивности, как правило, используется для настройки колебательного контура.

Наконец отметим, что в определённых случаях взаимная индукция нежелательна: например, две линии связи (телефон) оказывают взаимное влияние, мешая работе одна другой. Линии передачи электрической энергии, расположенные параллельно и вблизи линии связи, индуцируют в последней токи, вызывающие шум и треск, мешающие их работе.

Упражнения

1)* На тороидальном сердечнике трансформатора симметрично расположены три одинаковые обмотки. Одну из обмоток подключили к источнику переменного напряжения, вторую оставили разомкнутой, а к третьей подключили вольтметр (см. рис. 10). Оказалось, что вольтметр показывает половину напряжения источника. Что он покажет, если вторую обмотку замкнуть накоротко? Считайте сопротивления обмоток пренебрежимо малыми, вольтметр и источник – идеальными, магнитную проницаемость сердечника – не зависящей от величины магнитной индукции.

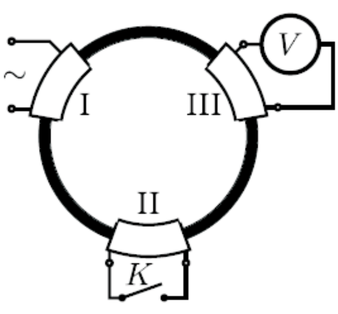

Рис. 10

Ответ. Вольтметр покажет одну треть от напряжения источника.

2)* Вдали от катушки с круглым цилиндрическим железным сердечником находится кольцо из сверхпроводящего материала. Ток в кольце равен нулю. На рис. 11 изображены линии индукции магнитного поля вблизи торца катушки; ось z является осью симметрии магнитного поля катушки. Кольцо вносят в магнитное поле катушки. Сначала кольцо занимает положение 1, а затем – положение 2.

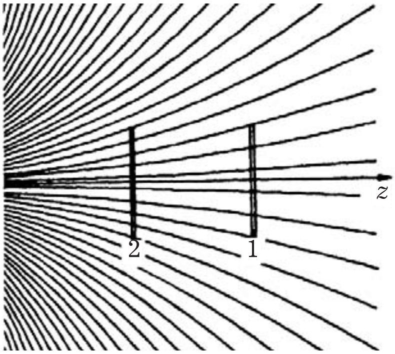

Рис. 11

а) Определите отношение (I_1 / I_2) силы тока, протекающего в кольце, когда оно находится в положении 1, к силе тока в кольце, когда оно находится в положении 2.

б) Определите соотношение сил (F_1/F_2), действующих на кольцо в обоих положениях, и укажите направление действия этих сил.

При решении воспользуйтесь схемой распределения линий магнитной индукции на рис. 11.

Подсказка к решению: решите данную задачу в следующем приближении, воспользовавшись аналогией с числом линий магнитной индукции при трактовке магнитного потока через замкнутый контур в начале работы, предположите, что магнитный поток через кольцо пропорционален количеству линий индукции магнитного поля, пронизывающих это кольцо. Далее попробуйте обосновать, что количество этих линий будет пропорционально квадрату числа линий, распределённых по диаметру кольца. После можно будет просто посчитать число линий на рисунке, пронизывающих кольцо. Также при расчёте отношения сил можно воспользоваться следующей идеологией, а именно, считать, что индукция магнитного поля пропорциональна густоте силовых линий, т.е. обратно пропорциональна расстоянию между двумя соседними линиями индукции.

Ответ. а) $\dfrac{I_1}{I_2} \approx 0{,}35$; б) $\dfrac{F_1}{F_2} \approx 0{,}05$.

Литература

1. *Путилов К.А.* Курс физики. Том 2. Учение об электричестве, Издание 6. Москва. Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. 583 стр.

2. *Калантаров П.Л., Цейтлин Л.А.* Расчёт индуктивностей, Справочная книга. – 3-е изд., перераб. и доп. Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. отд-ние, 1986. – 488 с.: ил.

3. *Геворкян Р.Г.* Курс физики: Учеб. пособие. – М.: Высш. школа, 1979. – 656 с.

4. Учебное издание: *Варламов С.Д., Зинковский В.И., Семёнов М.В., Старокуров Ю.В., Шведов О.Ю., Якута А.А.* Задачи Московских городских олимпиад по физике. 1986 – 2005.

Мудрые мысли Мудрые мысли Мудрые мысли

Изучайте азы науки, прежде чем пытаться взойти на её вершины. Никогда не беритесь за последующее, не окончив предыдущего, никогда не пытайтесь прикрыть недостатки ваших знаний хотя бы и самыми смелыми догадками и гипотезами.

И.П. Павлов

Знание, пассивно усвоенное памятью, без умения применять его на практике – это ещё совершенно мёртвый балласт в наших плаваниях по житейскому морю.

С.Г. Струмилин

Способности развиваются только при максимальном напряжении познавательных и созидательных сил, т.е. в процессе преодоления трудностей.

Л. Казанов

Умственные способности растут, как мускулы, при тренировке.

В.А. Обручев

Лучше научиться поздно, чем никогда.

Эзоп